证明唯一分解整环（UFD）的两种定义等价

定义一：唯一分解整环是一个整环，满足环中的任何一个非零元素都能唯一地表示为一个单位和有限个不可约元素的乘积。

定义二：唯一分解整环是一个整环，满足环中任何一个非零非单位元素都能表示为若干个素元素的乘积。

一推出二：因为单位与素元素相乘仍为素元素，只需证明每个不可约元素都是素元素。设 a 是不可约元素，而 $a|bc$. 不妨设 $bc \neq 0$, 且有 $ad = bc$. 将 b, c, d 都进行分解，得到 $a \prod d_k = (\prod b_i)(\prod c_j)$, 这是对 $ad = bc$ 的两种不同分解，存在 b_i 或 c_j 使得 $a \sim b_i$ 或 $a \sim c_j$ ，而这意味着 $a|b$ 或 $a|c$.

二推出一：每个素元素都是不可约元素，满足分解的存在性；如果有另一个分解 $q_1 q_2 ... q_m$, 其中 q_i 是不可约元素（单位与不可约元素的乘积仍然是不可约元素，故省略单位），我们有 $\prod_1^n p_i = \prod_1^m q_j$. 当 $n = 1$ 时，由 $p_1 | \prod_1^m q_i$ 推出 $p_1 | q_j (1 \leq j \leq m)$, 设 $p_1 d = q_j$. 由于 p_1 不是单位，而 q_j 不可约， d 必为单位，由此得到 $dq_1 ... q_{j-1} q_{j+1} ... q_m = 1$, 由整环满足交换律，剩下的每个 q_i 都为单位，这就证明了两种分解是相同的。当 $n = k$ 时，同上推出 $p_1 \sim q_j$ ，由整环的消去律变为 $n = k - 1$ 的情况，完成归纳。